数理解析研究所講究録
475巻 1982年 95-104

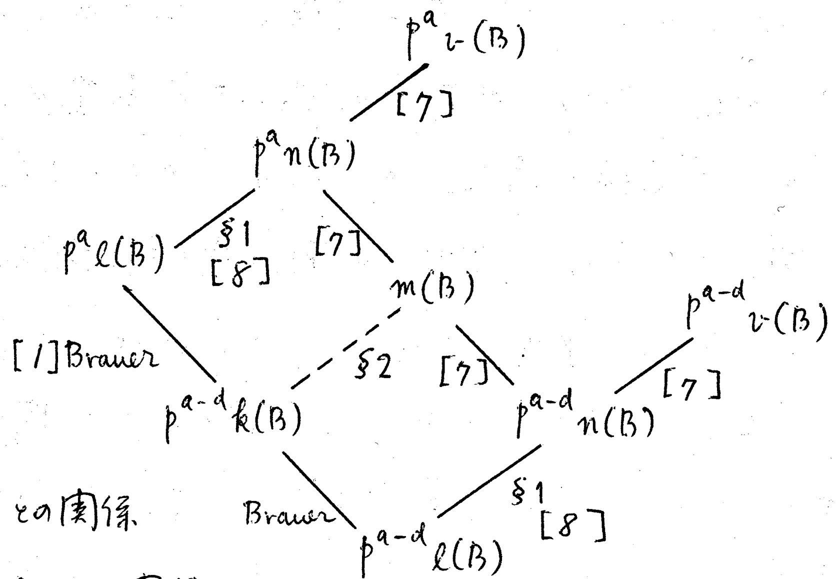
On the number of irreducible characters in a finite group

東京農工大　和田倶幸（Tomoyuki Wada）

Fを標数pの代数的閉体，Gを有限群，PをGのSylow p-部分群，$|P|=p^a$ とする。群環 FG を $G\times G$-加群とみることにより，Gのp-block B を FGの直既約 $F(G\times G)$-部分加群と考える。$n(B)$, $m(B)$ をそれぞれ $B_{P\times P}$, $B_{\Delta(P)}$ の直既約因子の数とする。（但し，$\Delta(P)=\{(x,x)\in P\times P \mid x\in P\}$）。$k(B):=|\mathrm{Irr}(B)|$, $l(B):=|\mathrm{IBr}(B)|$ とする。[7]で著者は，$n(B)$, $m(B)$ という Bに付随する二つの不変量を導入して，$l(B)$, $k(B)$, $n(B)$, $m(B)$ の四つの不変量の間に成り立つ，いくつかの関係を得た。その結果，$n(B)$と$m(B)$との間に成り立つ関係は，$l(B)$と$k(B)$との間に成り立つ関係に非常に類似している，という事がわかった。ここでは，その後得た，$l(B)$と$n(B)$ 及び $k(B)$と$m(B)$との間に成立つ関係について詳しく述べる。このような事を考えるに到った動機は，Gの指標の様子と，G（或いはGの中でのdefect group）の構造との間の関係

を詳しく知りたい為である。そこで、Gの指標とGの構造の中間の媒介として、G自身の部分集合である(P,P)-double cosets や P-conjugate classes が実際どれだけ役に立つのか調べている段階である。これらは確かにGの構造に直接影響を及ぼすが、指標との関係を直接言う事は極めて難しい。とにかく、$l(B)$, $k(B)$ と類似した関係をもつという事実は大きな前進であると思われる。但し、困難な点は、Brauerのいくつかの予想は defect group の元の fusion に無関係であるのに対し、(P,P)-double coset や P-conjugate classes は p-element の fusion に大きく依存するという点である。

我々のここでの結果を次のような図で表す。BをGの p-block, DをBの defect group, $|D|=p^d$ とする。$v(B)$は次のような p'-数である。 $\dim B = p^{2a-d}\, v(B)$。



以下、$l(B)$ と $n(B)$ との関係を§1で、$k(B)$ と $m(B)$ との関係を§2で述べる。

§1. $l(B)$ と $n(B)$ の関係

定理1. G の block B に対して、$l(B) \leqq n(B)$ が成り立つ.
特に $l(G) \leqq |P\backslash G/P|$ ($= G$ の (P,P)-double cosets の数).

定理2. e を B に対応する FG の block idempotent, F_P を trivial FP-module とするとき、次は同値.

(1) $l(B) = n(B)$

(2) $F_p{}^G e$ は完全可約 かつ multiplicity-free

(3) $\dim U = |P|$ for all projective indecomposable FG-mod. U in B. 更にこのとき、

(4) $\dim L =$ a power of p for all irreducible FG-mod. L in B.

定理1, 2 の証明. 1については著者自身の方法があったが、その方法で2.をうまく証明できなかった。ここでは奥山氏に教えて頂いた方法を紹介する。(尚、著者自身の元の方法については[8]を参照されたい。)

1. $n(B) = \dim \mathrm{Hom}_{FG}(F_p{}^G e, F_p{}^G e)$ は Mackey 分解よりわかる。次に $f: F_p{}^G e \xrightarrow{\text{nat.}} F_p{}^G e/\mathrm{rad}(F_p{}^G e) \longrightarrow \mathrm{soc}(F_p{}^G e) \xrightarrow{\text{inc.}} F_p{}^G e$ という FG-homo. 全体を考えると、これは $\mathrm{Hom}_{FG}(F_p{}^G e, F_p{}^G e)$ の subspace (実は ideal) となり、$F_p{}^G e/\mathrm{rad}(F_p{}^G e)$ 及び $\mathrm{soc}(F_p{}^G e)$

が、B に含まれるすべての irreducible FG-mod. を含む事より

$$\ell(B) \leqq \dim \mathrm{Hom}_{FG}\left(F_P{}^G e/\mathrm{rad}(F_P{}^G e),\ \mathrm{soc}(F_P{}^G e)\right)$$
$$\leqq \dim \mathrm{Hom}_{FG}\left(F_P{}^G e,\ F_P{}^G e\right) \quad = n(B).$$

2. 上で $\ell(B) = n(B) \Longleftrightarrow$ ① $F_P{}^G e/\mathrm{rad}(F_P{}^G e)$ 及び $\mathrm{soc}(F_P{}^G e)$ が multiplicity-free かつ ② 恒等写像 $1_{F_P{}^G e} \in$ 先の ideal $\Longleftrightarrow$ $F_P{}^G e$ は完全可約かつ multiplicity-free. これで (1)⇔(2) が言えた。 (2)⇒(3). $F_P{}^G e \cong L_1 \oplus \cdots \oplus L_{\ell(B)}$ より, Nakayama's relation から $U_P \cong FP$ for all U in B. (3)⇒(2). $U_P \cong FP$ であるから, $F_P{}^G e$ は各 L を唯1個だけ組成因子として含む。所が $F_P{}^G e/\mathrm{rad}(F_P{}^G e)$ は少くとも各 L を 1 個は含むから, $F_P{}^G e$ は完全可約かつ multiplicity-free. (4). $F_P{}^G e \cong L_1 \oplus \cdots \oplus L_{\ell(B)}$ より Frobenius の相互律で, 各 L_P は直既約かつ, Mackey 分解より,

$$L_P \mid F_P{}^G{}_P \cong \bigoplus_x \left(F_{P^x \cap P}\right)^P.$$ 故に, $\exists x$ があって $L_P \cong \left(F_{P^x \cap P}\right)^P$. 特に, $\dim L = |P : P \cap P^x|$.

注意. 定理2は次の二つの点で興味深い。一つは, (2) が Motose-Ninomiya [5], Knörr [3] 等のいわゆる p-radical group になっている (multiplicity-free は更に強い状態)。二つめは, (4)の証明で, すべての既約加群の vertex が Sylow intersection になっている事である。Okuyama [6] により p-solvable group では, すべての既約加群の vertex は Sylow intersection となる。

又. $\ell(B)=n(B)$ のときには. $(\chi_p, 1_p)=1$ or 0 で $(\chi_p, 1_p)=1$ なら χ は modulary irreducible となる。これらから. $\ell(B)=n(B)$ をみたす block をもつ群は p-solvable に近い事が予想されるが. 次が成り立つ。

系 1. D: B の defect group s.t. $D \triangleleft P$ のとき $\ell(B)=n(B)$ $\Longrightarrow$ 次が成立. (1) $Z(D) \leq O_p(G \bmod \mathrm{Ker} B)$, 特に. D が abelian なら $D \cdot \mathrm{Ker} B \triangleleft G$, (2) $\exists$ p-solvable subgroup $N \triangleleft G$ s.t. $D \in Syl_p(N)$, 特に $D=P$ なら G は p-solvable.

証明. (1). 各 $L_P \cong F_Q^P$ であった。ここで Q は. L の vertex. Knörr [4] より $C_D(Q) \leqq Q \leqq D$ をみたす defect group D が、とれる。特に $Z(D) \leqq Q$ より. $Z(D) \triangleleft P$ に注意すると、$L_{Z(D)}$ は trivial で $Z(D) \leqq \bigcap_{L \in B} \mathrm{Ker} L = O_p(G \bmod \mathrm{Ker} B)$ を得る。

(2). $H = O_p(G \bmod \mathrm{Ker} B)$ とする。$\overline{G}=G/H$ として $\overline{B} \subset B$ で defect group $\overline{D}$ なる $\overline{G}$ の block を考えると. やはり $\ell(\overline{B})=n(\overline{B})$ をみたし. $Z(\overline{D}) \subseteq O_p(\overline{G} \bmod \mathrm{Ker} \overline{B})$ を (1) より得る。この操作をくり返す事により (2) を得る。

さて. Fong [2] より. G が p-solvable なら次が成立。

系 2. G: p-solvable なら. 定理 2. の (1). (2). (3). (4) は同値. 所が (4) は一般には. (1), (2), (3) と同値にはならない。

例. $G = SL(2, 2^n)$ $(n \geqq 2)$, B: principal 2-block のとき $\dim L$ はすべて 2 巾 だが, $\ell(B) = 2^n - 1 < n(B) = 2^{n+1} - 3$.

又. 系1の結論は $D \triangleleft P$ でなければ. 一般には成立しない。

例. $G = S_5$ $p=2$. $B = \{\chi_1, \chi_2\}$ $\chi_i(1) = 4$. defect 1 の block のとき. $D \ntriangleleft P$, $\ell(B) = n(B) = v(B) = 1$ だが. (1), (2) は共に成立しない。

更に. 系1の(2)の主張は. $D \triangleleft P$ でも G 自身が p-solvable になるとは限らない。例えば. H: simple group で degree p 巾の defect 0 の character をもつとする。D: abelian として $G = D \times H$ を考えれば. D の principal block と先の H の defect 0 の block の直積 B の defect group は D で $D \triangleleft G$ かつ $\ell(B) = n(B) = v(B) = 1$ だが. G は p-solvable ではない。では. G が p-solvable のとき. B: principal block で $\ell(B) = n(B)$ をみたすなら. G はどのような構造になるであろうか。例としては. S_4 の principal 2-block があるが. p-length がおさえられないだろうかというのが残る問題である ([8] 参照されたい)。

§2. $k(B)$ と $m(B)$ の関係.

2ページの図で点線で書いたのは. 前後関係からこの不等式が一般に成立するのは自然であるのだが. 残念ながら一般

には成立しない。最初に、一般に成立する関係を述べる。

[7] により、 $m(B) = \sum_{\chi \in \mathrm{Irr}(B)} (\chi_p, \chi_p)$ となる事から

i) $k(B) \leqq m(B)$ が言える。 又、 $p^{a-d} v(B) \leqq m(B)$ かつ

$k(B) \leqq p^d v(B)$ より、 ii) $p^{a-2d} k(B) \leqq m(B)$ が言える。

ここで言いたいのは iii) $p^{a-d} k(B) \leqq m(B)$ であるが、次のような反例がある。 $G = S_5$, $p=2$, $B = \{\chi_1, \chi_2\}$, $\chi_i(1) = 4$

B は defect 1 の 2-block で defect group D は Sylow 群の中で正規でない。 このとき、 $p^{a-d} k(B) = 8$, $m(B) = 6$ である。

では、どのような時、iii) が言えるだろうか。

定理3. D: defect group of B, $P \in Syl_p(G)$ で $D \subseteq Z(P)$ ならば

$p^{a-d} k(B) \leqq m(B)$.

定理4. $D \subseteq Z(P)$ のとき、次は同値.

(1) $p^{a-d} k(B) = m(B)$

(2) $k(B) = p^d n(B)$

(3) $k(B) = p^d v(B)$ (これは、$k(B) = p^d$ かつ $v(B) = 1$ と同値)

更にこのとき、 $[G, D] \subseteq \mathrm{Ker}\, B$ となる。

定理3,4の証明. $m(B) = \sum_{\chi \in B} (\chi_p, \chi_p)$ より右辺を直接計算してみる。その前に、いくつかの注意を書く。

(注 1.) B : block with defect group D, σ : p-element として, $d^{\sigma}_{\chi\mu}$ を generalized decomposition number とする。このとき次は同値.

1) $\sigma \underset{G}{\in} D$ 2) $\exists \chi \in \mathrm{Irr}(B)$ s.t. $\chi(\sigma) \neq 0$

3) $\exists \hat{B}$: block of $C_G(\sigma)$ s.t. $\hat{B}^G = B$

(注 2.) $\displaystyle\sum_{\chi \in \mathrm{Irr}(B)} d^{\sigma}_{\chi\mu} \overline{d^{\sigma}_{\chi\nu}} = c^{\sigma}_{\mu\nu}$ ($C_G(\sigma)$ の Cartan invariant)

(注 3.) $\displaystyle\widetilde{B(\sigma)} \overset{\text{put}}{=\!=} \bigoplus_{\tilde{B}_i^G = B} \tilde{B}_i$ ($\hat{B}_i$: block of $C_G(\sigma)$) とする.

$\displaystyle l(\widetilde{B(\sigma)}) = \sum_{\tilde{B}_i^G = B} l(\hat{B}_i)$ とおくと. $\displaystyle k(B) = \sum_{\substack{\sigma : p\text{-elem. in } D \\ \text{の } G\text{-共役の代表}}} l(\widetilde{B(\sigma)})$

さて. $\displaystyle m(B) = \sum_{\chi} (\chi_p, \chi_p) = \frac{1}{p^a} \sum_{\chi} \sum_{\sigma \in P} |\chi(\sigma)|^2$

(注1) より $\displaystyle \geq \frac{1}{p^a} \sum_{\chi} \sum_{\sigma \in D} |\chi(\sigma)|^2$

$$= \frac{1}{p^a} \sum_{\sigma \in D} \sum_{\chi} \sum_{\mu} d^{\sigma}_{\chi\mu} \varphi^{\sigma}_{\mu}(1) \sum_{\nu} \overline{d^{\sigma}_{\chi\nu}} \varphi^{\sigma}_{\nu}(1)$$

(注2) より $\displaystyle = \frac{1}{p^a} \sum_{\sigma \in D} \sum_{\mu, \nu} c^{\sigma}_{\mu\nu} \varphi^{\sigma}_{\mu}(1) \varphi^{\sigma}_{\nu}(1)$

$$= \frac{1}{p^a} \sum_{\sigma \in D} \dim \widetilde{B(\sigma)}$$

今 仮定 $D \subseteq Z(P)$ より $|C_G(\sigma)|_p = p^a$ である。ゆえに. $\dim \tilde{B}_i = p^{2a-d_i} v(\tilde{B}_i)$ で, $\tilde{B}_i^G = B$ より $d_i \leq d$. 又, 一般に $l(\tilde{B}_i) \leq v(\tilde{B}_i)$ であるから. 続けて. $\displaystyle \geq \frac{1}{p^a} \sum_{\sigma \in D} p^{2a-d} \, l(\widetilde{B(\sigma)})$

(注3) より $\geq p^{a-d} k(B)$ を得る.

次に、等式が成立する場合を考える。三つある不等号のうち、最初と最後をみると、これが等号になる為の必要十分条件は、$\{\sigma^G\} \cap P = \{\sigma\}$　${}^\forall\sigma \in D$　という事である。これは[7]の Theorem (3B) によれば、$m(B) = p^a n(B)$　と同値である。故に $p^{a-d} k(B) = m(B)$ なら $k(B) = p^d n(B)$ を得る。2ページの図を見ればわかるように、$k(B) = p^d n(B)$ なら $l(B) = n(B)$ である。今、$D \subseteq Z(P)$ の場合であるから、系1の(1)より $D \cdot \mathrm{Ker}\, B \lhd G$。これは[7]の Theorem (3A) によれば、$n(B) = v(B)$ と同値である。(Theorem (3A) で $G \rhd D \cdot \mathrm{Ker}\, B \Rightarrow n(B) = v(B)$ という命題については、Dが *strongly closed* という仮定は必要ない)。従って、$k(B) = p^d n(B)$ なら $k(B) = p^d v(B)$ を得る。2ページの図にもどって、$k(B) = p^d v(B)$ なら明らかに、$p^{a-d} k(B) = m(B)$。最後に、$D \subseteq Z(P)$ であるから、[7]の Theorem (4B) より、$k(B) = p^d v(B)$ なら、$[G, D] \subseteq \mathrm{Ker}\, B$ を得る。

注意、定理3,4 で、$D \subseteq Z(P)$ という条件は $D \lhd P$ という条件に弱められないだろうか。(2)と(3) の同値性は無条件で成立するはずである。又、$m(B) = p^a n(B) \Longrightarrow m(B) = p^a v(B)$ が成立するかという問題は未だに解決できていない。これは、"Dのすべての元σが $\{\sigma^G\} \cap P = \{\sigma\} \Longrightarrow [G, D] \subseteq \mathrm{Ker}\, B$" が成立するかという問題と同値である。

参考文献

[1] R. Brauer : On blocks and sections in finite groups. II. Amer. J. Math., 90 (1968) 895-925.

[2] P. Fong : Solvable groups and modular representation theory. Trans. A.M.S., 103 (1962) 484-494.

[3] R. Knörr : Semi Simplicity, induction and restriction for modular representations in finite groups. J. Alg., 48 (1977) 346-367.

[4] R. Knörr : On the vertices of irreducible modules. Ann. Math., 110 (1979) 487-499.

[5] Motose-Ninomiya : On the subgroup H of a group G such that J(KH)KG > J(KG). Math. J. Okayama Univ., 17 (1975) 175-178.

[6] Okuyama : Vertices of irreducible modules of p-solvable groups. (preprint)

[7] Wada : Blocks with a normal defect group. Hokkaido Math. J., 10 (1981) 319-332.

[8] Wada : On the number of irreducible characters in a finite group. (to appear in Hokkaido Math J. 12)